Universidad Simón Bolívar
Preparadurías de Matemáticas I (MA1111)
Preparador: Ricardo J. Fernández Terán (RicharOrange@hotmail.com)

SOLUCIONES EXPLICADAS DEL PRIMER EXAMEN PARCIAL (20 %)

SEPTIEMBRE-DICIEMBRE 2012 Tipo B (Horario 3-4)

1. Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2+|x-1|}{x^2-2x-3} \leq 1$$

Solución:

Se trata de una inecuación racional con valor absoluto por lo que hay que comparar con cero:

$$\frac{x^2+|x-1|}{x^2-2x-3} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+|x-1|}{(x-3)(x+1)} - 1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+|x-1|-(x^2-2x-3)}{(x-3)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{|x-1|+2x+3}{(x-3)(x+1)} \leq 0$$

La expresión $|x-1|$ cambia en $x=1$, por lo que los posibles casos son:

Caso I: $x<1 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$

$$\frac{-(x-1)+2x+3}{(x-3)(x+1)} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+4}{(x-3)(x+1)} \leq 0$$

Puntos críticos: $\{-4;\ -1\ ;1;\ 3\}$

Considero sólo los intervalos tales que $x<1$ y evalúo en los puntos críticos.

Caso I	$(-\infty,-4)$	$(-4,-1)$	$(-1,1)$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$
$\frac{3x+2}{(x-3)(x+1)}$	$-$	$+$	$-$
$\text{Sol}_1 \equiv (-\infty,-4] \cup (-1,1)$			

Caso II: $x \geq 1 \Rightarrow |x-1| = x-1$

$$\frac{x-1+2x+3}{(x-3)(x+1)} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x+2}{(x-3)(x+1)} \leq 0$$

Puntos críticos: $\{-1;\ -2/3\ ;1;\ 3\}$

Considero sólo los intervalos tales que $x \geq 1$ y evalúo en los puntos críticos.

Caso II	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$3x+2$	$+$	$+$
$x+1$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$+$
$\frac{2-x}{(x-3)(x+1)}$	$-$	$+$
$\text{Sol}_2 \equiv [1,3)$		

Sabemos entonces que: $\mathbf{SOLUCIÓN} \equiv \mathbf{Sol_1} \cup \mathbf{Sol_2} = (-\infty,-\mathbf{4}] \cup (-\mathbf{1},\mathbf{1}) \cup [\mathbf{1},\mathbf{3}) = (-\infty,-\mathbf{4}] \cup (-\mathbf{1},\mathbf{3})$

2. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(3,5)$ y $B(-1,1)$ sabiendo que la recta de ecuación $T \equiv 3x + y + 2 = 0$ es tangente a dicha circunferencia en el punto B. Indicar expresamente su centro y su radio.

__Solución:__

La recta que contiene al segmento $\overline{AB}$ es una cuerda que llamaremos $\boldsymbol{L}$. La recta perpendicular a esta cuerda (que llamaremos $\boldsymbol{P_C}$) que pase por el punto medio de $\overline{AB}$ pasará por el centro de la circunferencia.

En el punto de tangencia, la recta perpendicular a la recta tangente (la llamaremos $\boldsymbol{P_T}$) también pasará por el centro, por lo que intersectando $\boldsymbol{P_T}$ y $\boldsymbol{P_C}$ tendremos la posición del centro, y el radio será sencillamente la distancia del centro a cualquiera de los puntos, A ó B.

En primer lugar hallamos las ecuaciones de $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{P_C}$ y $\boldsymbol{P_T}$:

$$P_m = \left(\frac{3+(-1)}{2}; \frac{5+1}{2}\right) = (1,3) \qquad m_L = \frac{1-5}{-1-3} = 1$$

$$L \equiv y = x + b \qquad b = (1) - (-1) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{L \equiv y = x + 2}$$

$$m_T \cdot m_{P_T} = -1 \;\Longrightarrow\; (m_T = -3) \;\Longrightarrow\; m_{P_T} = 1/3 \qquad P_T \equiv y - 1 = \frac{1}{3}(x+1) \;\Longrightarrow\; \boldsymbol{P_T \equiv 3y = x + 4}$$

$$m_L \cdot m_{P_C} = -1 \;\Longrightarrow\; (m_L = 1) \;\Longrightarrow\; m_{P_T} = -1 \qquad P_C \equiv y - 3 = -(x-1) \;\Longrightarrow\; \boldsymbol{P_C \equiv y = 4 - x}$$

Luego hallamos el punto de intersección entre $\boldsymbol{P_T}$ y $\boldsymbol{P_C}$ resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 3y = x + 4 \\ y = 4 - x \end{cases} \Longrightarrow \text{ intersección en el punto } (2;\ 2) = \text{centro de la circunferencia } \boldsymbol{C}(2;2)$$

El radio de la circunferencia será entonces la distancia entre el centro y cualquiera de los dos puntos que pertenecen a ella, por ejemplo, tomando $B(-1,1)$:

$$d_{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10} \qquad \Longrightarrow \quad \text{radio de la circunferencia} \equiv \boldsymbol{r} = \sqrt{10}$$

Así, la ecuación canónica de la circunferencia pedida será: $\boldsymbol{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 10}$

3. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \sqrt{x+4}$$

a) Bosqueje las gráficas de ambas funciones.
b) Determine $\mathrm{Dom}(g)$
c) Encuentre una expresión para $f \circ g$

__Solución:__ *(Las gráficas se encuentran en la siguiente página)*

$\mathrm{Dom}(g) \equiv \{x \in \mathbb{R}:\ x + 4 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}:\ x \geq -4\} = [-4, +\infty)$

La composición se realiza sustituyendo literalmente:

$$f \circ g = f\big(g(x)\big) = \begin{cases} g(x) + 1 & \text{si } g(x) < 1 \\ -g(x) + 1 & \text{si } g(x) \geq 1 \end{cases}$$

Ahora calculamos los intervalos de definición en términos del dominio de la función interna:

$$g(x) < 1 \longrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} < 1 \\ x \in \mathrm{Dom}(g) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} < 1 \\ x \in [-4,+\infty) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+4 < 1 \;\Longrightarrow\; x < -3 \;\Longrightarrow (-\infty,-3) \\ \qquad\qquad x \in [-4,+\infty) \end{cases}$$

$$g(x) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-4,-3)$$

$$g(x) \geq 1 \longrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} \geq 1 \\ x \in \mathrm{Dom}(g) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} \geq 1 \\ x \in [-4,+\infty) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \;\Longrightarrow\; [-3,+\infty) \\ \qquad x \in [-4,+\infty) \end{cases}$$

$$g(x) \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-3,+\infty)$$

Así, finalmente:

$$\boxed{(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \sqrt{\boldsymbol{x}+\mathbf{4}}+\mathbf{1} & \textbf{si } -\mathbf{4} \leq \boldsymbol{x} < -\mathbf{3} \\ -\sqrt{\boldsymbol{x}+\mathbf{4}}+\mathbf{1} & \textbf{si } \boldsymbol{x} \geq -\mathbf{3} \end{cases}}$$

Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$: